FIL·LOTAXI, ARTEFACTE RÍTMIC, NOMBRE D'OR I SECCIÓ ÀURIA

Comunicació presentada el dia 22 de gener de 1976
per

FRANCESC GIL I MARTÍNEZ

Departament de Fisiologia Vegetal. Facultat de Biologia.
Universitat de Barcelona.

SUMMARY

Phyllotaxy, rythmic artifact, golden number and golden section

In this work, a mathematical demostration is given for the formulation of the rythmic artifact of interaction between the amplitude of the statistical class and the micrometric accuracy of the measurement of the axial microscopic parameters already discovered empirically in previous research.

Given the similarity between this formulation amb the phenomena of phyllotaxy, a series of relations in then established between the Fibonacci series, the gold number, the interaction artifact and the position of the leaves in the higher plants. These relations can be formulated thanks to the properties of discontinuity, translation and symmetry of curve in the theoretical artifact and the inverse of the average artefact period with respect to the variable R in the interval R 0.5.

All these considerations are limited to the set of rational numbers which is the normal range in which the values of C (amplitude of the stochastic class) and M (micrometric accuracy) are to be found.

INTRODUCCIÓ

Així com s'esmentava en treballs anteriors,[1, 2] en mesurar amb microscopi els paràmetres lineals d'un conjunt d'elements amb una precisió M i en establir classes estadístiques d'amplitu C, per al tractament estocàstic pertinent, s'introdueix un artefacte rítmic de període mitjà, expressat en classes:

$$P_c = \frac{1}{0.5 - \mid R - (0.5 + [R]) \mid}$$

I, expressat en micres (prenent la micra com unitat microscòpica):

$$P_{\mu} = \frac{C}{0.5 - \mid R - (0.5 + [R]) \mid}$$

essent $R = C/M$, on $R \in Q$ (racionals) i $R > O$.

El fet que $R \in Q$ implica que C i M siguin nombres commensurables, és a dir, que sempre:

$$R = \frac{C}{M} = \frac{a}{b},$$

on a, $b \in N$ (naturals) i, aleshores,

$$bC = aM,$$

cosa que indica que existeix sempre un nombre, múltiple de C i M, menor o igual a bC o a aM. Aquest mínim comú múltiple es defineix com el nombre més petit, A, que, dividit per C i per M, ens dóna quocients naturals.

Hom vol demostrar[3] que, si establim un sistema de coordenades ortogonal i pla, dins del qual prenem a l'eix d'abscisses unitats pertanyents al conjunt dels nombres naturals, tracem des de l'origen una recta de pendent M fins una altura A a l'eix y' paral·lel a les ordenades i dividim aquesta distància en classes C, en projectar després les imatges dels valors naturals de les x sobre la recta M i, a continuació, sobre y', prenent com a freqüència de cada classe C el nombre de projeccions a cadascun dels intervals de la mateixa amplitud, es forma un determinat polígon de freqüències que té un nombre determinat de pics (p) que compleix:

$$\frac{A}{p} = P.$$

Amb aquesta finalitat demostrarem en primer lloc el següent *lema*:

$$[2R] \begin{cases} 2\ [R] & \text{si } R - [R] < 1/2 \\ 2\ [R] + 1 & \text{si } R - [R] \geq 1/2 \end{cases}$$

Efectivament,

$$R = [R] + (R - [R]).$$

Si multipliquem ara cadascun dels membres de la igualtat per 2, tenim:

$$2R = 2\ [R] + 2\,(R - [R])$$

i

$$[2R] = 2\ [R] + [2\ (R - [R])\,] \qquad [1]$$

Ara bé, per definició

$$0 \leq R - [R] < 1$$

i, multiplicant per 2 cadascun dels dos membres d'aquesta desigualtat,

$$0 \leq 2\ (R - [R]) < 2.$$

Si

$$R - [R] \leq 1/2 \Rightarrow 0 \leq 2\,(R - [R]) < 1$$

d'on

$$[2\,(R - [R])] = 0$$

i substituint a [*1*]

$$[2R] = 2\ [R] \qquad [2]$$

Si

$$R - [R]\ 1/2 \Rightarrow 1 < 2\,(R - [R]) < 2$$

d'on

$$[2\,(R - [R])] = 1$$

i, substituint en [*1*]

$$[2R] = 2\,[R] + 1 \qquad [3]$$

Es pot veure la construcció esmentada a la figura 1, on s'aprecia que el nombre d'intervals és A/C i el nombre de projeccions és A/M.

L'artefacte, com es desprèn de la mateixa formulació, apareix només quan $R \notin N$, ja que si no, llavors, $P_c = \infty$. Per a $R \notin N$ les projeccions (llevat de la projecció d'A/M) són interiors als intervals C, ja que si no, en un punt $z < A$ es compliria

$$z = Cb' = Ma'$$

i A ja no seria el m.c.m. (C, M) com ho és per definició.

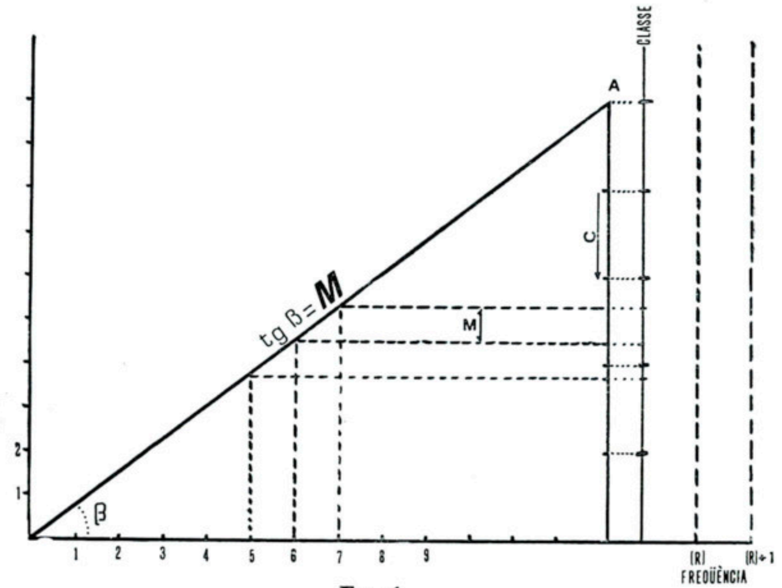

FIG. 1

Anomenem n el nombre de projeccions dins d'un interval de longitud C.

Les distàncies entre dues projeccions consecutives seran precisament M. Hi haurà llavors n-1 intervals de projecció dins d'un interval **C** i les distàncies entre les projeccions extremes dins d'un mateix interval C seran (n-1)M.

Tenim

$$(n\text{-}1)M \leq C$$

d'on

$$n\text{-}1 \leq \frac{C}{M} = R,$$

cosa que implica

$$n\text{-}1 \leq [R]$$

i

$$n \leq [R] + 1.$$

Tenint en compte que C/M = R, [R] ha de ser el nombre d'intervals de longitud M consecutius pertanyents a un interval de llargada C.

Donat que dins de cadascun dels intervals de llargada M hi ha una projecció, el nombre de projeccions (n) complirà

$$[R] \leq n$$

i per tant el nombre de projeccions dins d'un interval complirà

$$[R] \leq n \leq [R] + 1.$$

Com que el nombre de projeccions d'un interval és un nombre natural, les freqüències possibles seran [R] o [R] + 1. Prenguem ara un interval de longitud 2C, on m sigui el nombre de projeccions dins d'aquest interval. Es complirà

$$\frac{2C}{M} = 2R$$

i, òbviament, segons un raonament de la mateixa mena

$$[2R] \leq m \leq [2R] + 1.$$

Són possibles dos casos:

Cas 1

$$R - [R] < 1/2$$

Hom sap (de [*2*])

$$[2R] = 2\,[R]$$

i, per consegüent,

$$2\,[R] \leq m \leq 2\,[R] + 1 \qquad [4]$$

Si dins del primer interval C (I_1) hi ha n_1 projeccions i dins del segon interval (I_2) hi ha n_2 projeccions, es complirà

$$m = n_1 + n_2.$$

Si

$$n_1 = [R] + 1 \quad \text{i} \quad n_2 = [R] + 1$$

llavors

$$m = n_1 + n_2 = 2\,[R] + 2 > 2\,[R] + 1,$$

cosa que contradiu [*4*].

Així, com que en aquest cas l'escala de freqüències pertany a [R] + 1, no hi pot haver dos punts consecutius damunt d'aquesta escala i els pics de freqüències correspondran a punts damunt l'escala [R] + 1.

Cas 2

$$R - [R] \geq 1/2$$

Segons [3]

$$[2R] = 2[R] + 1$$

i, aleshores,

$$2\,[R] + 1 \leq m \leq 2\,[R] + 2 \qquad [5]$$

Si

$$n_1 = [R] \quad i \quad n_2 = [R]$$

com que

$$m = n_1 + n_2$$

llavors

$$m = 2\,[R] < 2\,[R] + 1,$$

cosa que contradiu [5].

En aquest cas, damunt l'escala pertanyent a [R] no hi pot haver punts consecutius i els pics seran punts damunt l'escala [R].

Un cop coneguda l'entitat dels pics i damunt quina escala són formats, farem ja la demostració volguda. Hem anomenat p el nombre de pics dins d'un interval, A. El nombre de projeccions totals serà A/M i el nombre d'intervals de longitud C és A/C. Les projeccions per interval de llargada C són [R] o [R] + 1.

Cas 1

$$R - [R] < 1/2$$

Ja se sap que:

$$2R < 2\,[R] + 1 = R + ([R] + 1)$$

i

$$R < \frac{[R] + ([R] + 1)}{2}$$

és a dir, R és més petit que la mitjana aritmètica de [R] i [R] + 1. Aleshores hi ha menys intervals de [R] + 1 projeccions. Dins de l'escala corresponent a [R] + 1 hi ha menys punts que dins de la corresponent a [R].

Cas 2

$$R - [R] \geq 1/2$$

Fent el mateix tipus de càlcul

$$R \geq \frac{[R] + ([R] + 1)}{2}$$

és a dir, R és més gran o igual que la mitjana aritmètica de [R] i [R] + 1; llavors dins l'escala corresponent a [R] hi ha els mateixos o menys punts que dins de la corresponent a [R] + 1. (El mateix nombre tan sols es compleix en el cas de que R — [R] = 1/2.)

El nombre de pics serà el nombre de punts dins de l'escala amb menys punts.

TEOREMA

$$A/p = P_{\mu} = P_c\, C$$

Cas 1

$$R - [R] < 1/2$$

Els pics seran punts damunt l'escala [R] + 1.
Nombre de projeccions = A/M.
Nombre d'intervals total = A/C.
Nombre de projeccions total = Σn projeccions dins de cadascun dels intervals.
Nombre d'intervals en què hi ha [R] + 1 projeccions = p.
Nombre d'intervals en què hi ha [R] projeccions = A/C — p.

Òbviament,

$$A/M = p\ ([R] + 1) + (A/C - p)\ [R] = p + \frac{A}{C}[R]$$

d'on

$$p = A\ \left(\frac{1}{M} - \frac{[R]}{C}\right)$$

i, aleshores,

$$A/p = \frac{1}{\frac{1}{M} - \frac{[R]}{C}} = \frac{C}{\frac{C}{M} - [R]} = C\frac{1}{R - [R]} =$$

$$= C\frac{1}{0.5 - |\ R - (0.5 + [R])\ |} = C\ P_c = P_{\mu}$$

Cas 2

Els pics seran punts damunt l'escala [R].

Anàlogament,

$$A/M = p\ [R] + (A/C - p)\ ([R] + 1)$$

aleshores,

$$A/M = A/C\ [R] + A/C - A/C\ ([R] + 1) - p$$

i

$$A\ (\frac{1}{M} - \frac{[R] + 1}{C}) = -\ p$$

llavors

$$A/p = \frac{1}{\frac{[R] + 1}{C} - \frac{1}{M}} = \frac{C}{[R] + 1 - R} =$$

$$= C\frac{1}{[R] + 1 - R} = C\frac{1}{0.5 - |\ R - (0.5 + [R])\ |} = C\ P_c = F_p$$

Amb la qual cosa tot resta demostrat.
A més, d'això resulta que:

Si

$$R - [R] < 1/2 \Leftrightarrow P_c = \frac{1}{R - [R]} \qquad [6]$$

i si,

$$R - [R] \geq 1/2 \Rightarrow P_c = \frac{1}{1 - (R - [R])}$$

Si Rr pertanyés al conjunt dels nombres naturals, con C, seria múltiple sencer de M; aleshores, A = m.c.m. (M, M) = C i tan sols restaria un interval C. El nombre de projeccions seria A/M = C/M = R i, llavors, tenint en compte que

$$[R] = R$$

el nombre de pics seria

$$p = 0$$

d'on

$$A/p = C/p + \infty \quad \text{i} \quad P = +\ \infty$$

del qual resulta que no hi hauria l'artefacte rítmic.

Nombre d'or

Hom defineix el nombre d'or com un nombre

$$N = \frac{a}{b} > 0$$

que essent

$$b > a > 0$$

acompleix la següenta relació àuria:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a + b}$$

Per a trobar aquest nombre N tan sols hem de considerar $b = 1$, ja que aleshores

$$N = \frac{a}{1} = \frac{1}{a + 1} = a$$

El procés va endavant així

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{1 + a} \Rightarrow 1 = a + a^2$$

i, d'aquí,

$$a^2 + a - 1 = 0$$

Aquesta equació de segon grau té dues solucions possibles, que són:

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Però com que, per definició, $a > 0$, tan sols pot acceptar-se la solució

$$a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = N.$$

Si prenem, per exemple, un rectangle de costat petit a i de costat gran c (fig. 2), aquesta figura verificarà la relació àuria si

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{a + c}$$

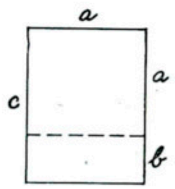

FIG. 2

o, el que és el mateix (essent $c = a + b$)

$$\frac{a}{a + b} = \frac{a + b}{2a + b}$$

D'ací es desprèn que

$$(a + b)^2 = 2\,a^2 + ba$$

Però, per altra banda

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab$$

cosa que permet igualar

$$2\,a^2 + ba = a^2 + b^2 + 2\,ab$$

Substraient ab a cadascun dels termes de la igualtat veiem que:

$$2\,a^2 = a^2 + b^2 + ab$$

i, fent això mateix amb a^2,

$$a^2 = b^2 + ab$$

i, d'aquí,

$$b^2 + ab - a^2 = 0$$

que té com a solucions

$$b = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

Donat que $b > 0$, ja que $c > a$ i $c = a + b$, prendrem la solució positiva i tindrem

$$b = \frac{-a + \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(-1 + \sqrt{5})}{2}$$

és a dir, b i a estan en relació àuria. Dit d'altra manera: dos costats d'un rectangle estan en relació àuria si el més petit dels dos i la diferència entre ells també ho estan. Això es comprova de manera fàcil, ja que, si

$$\frac{a}{a + b} = \frac{a + b}{2a + b} = N.$$

També és compleix

$$\frac{a}{a} = \frac{a}{a + b} = N.$$

Si tenim en compte ara a i b com el dos angles en què pot dividir una circumferència ($a + b = 360^\circ$), aquesta manifestarà una secció àuria si (tenint com a unitat la mateixa circumferència)

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{1}$$

Com que en aquest cas, per definició, $b = 1 - a$, tindrem

$$\frac{a}{1 - a} = \frac{1 - a}{1}$$

cosa que fa que

$$(1 - a)^2 = a = 1 + a^2 - 2a$$

D'aquí

$$a^2 - 3a + 1 = 0$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

aquí, les dues solucions ens donen valors positius d'a. Però, com que $a < 1$, ens valdrà la solució de signe negatiu i, aleshores,

$$a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \qquad [7]$$

i

$$b = 1 - a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = N.$$

Podem, aleshores, escriure una sèrie d'igualtats

$$N = \frac{1 - a}{a} = \frac{a}{1} = \frac{1}{1 + a} = \frac{1 + a}{2 + a} = \frac{2 + a}{3 + 2a} =$$

$$= \frac{3 + 2a}{5 + 3a} = \frac{5 + 3a}{8 + 5a} = \ldots\ldots \qquad [8]$$

en els termes de la qual hom aprecia fàcilment els de la sèrie de Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

i, a més, des de $\frac{1 + a}{2 + a}$, aqueixes igualtas poden ser expressades per

$$\frac{a_{n+1} + a_n\, a}{a_{n+2} + a_{n+1}\, a}$$

Fil·lotaxi i sèrie de Fibonacci

El fet que aquestes igualtats puguin ser concebudes en termes de la sèrie esmentada pot permetre la relació del nombre d'or amb la fil·lotaxi o la col·locació de les fulles sobre la tija de les plantes superiors. Efectivament, com ja Leonardo da Vinci havia descobert al Renaixement, els punts d'intersecció de les fulles i la tija segueixen una llei d'ordenació que hom pot expressar per mitjà d'una fracció a/b. Donada una helicoide generatriu que passa per tots els punts d'inserció, a és el nombre de voltes d'aquesta helicoide perquè dues insercions es trobin a la mateixa vertical (ortòstic) i b el nombre de fulles comprès entre aquestes insercions. Quan això passa així, a, $b \in F$, essent F un terme serial de l'esmentada sèrie de Fibonacci. Una de les sèries fil·lotàctiques més generals és

$$1/2,\ 1/3,\ 2/5,\ 3/8,\ 5/13,\ 8/21,\ 13/34,\ 21/55,\ \ldots$$

on hom pot veure amb facilitat que quan n és senar la sèrie és decreixent

$$1/2 \quad 2/5 \quad 5/13 \quad 13/34 \quad 34/89 \ldots$$

i per a n parell la sèrie és creixent

$$1/3 \quad 3/8 \quad 8/21 \quad 21/55 \quad 55/144 \ldots$$

i, a més, aquestes dues sèries (subsèries) per a $n \rightarrow \infty$ semblen tenir el mateix límit. És a dir, la sèrie total sembla ésser una sèrie oscil·lant acotada entre 1/2 i 1/3 i amb el límit intermedi entre aquests dos valors (fig. 3).

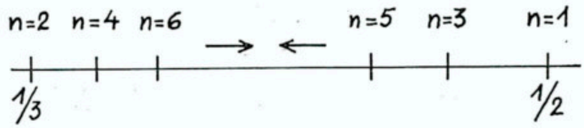

FIG. 3

Procedirem a la demostració del que hem dit abans i al càlcul d'aquest límit.

Si hom pren la sèrie de Fibonacci dels numeradors (en realitat és la mateixa sèrie que la dels denominadors) i es fa la correspondència:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \ldots \end{array}$$

hom veurà que, per a tot a_n quan $n > 1$, es compleix

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

i, aleshores, la sèrie fil·lotàctica serà

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+2}}$$

D'aquí

$$\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{a_n + a_{n+1}}{a_n}} = \frac{1}{1 + \dfrac{a_{n+1}}{a_n}}$$

i, aleshores,

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{1}{1 + \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}} \qquad [9]$$

Si existeix el límit

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existirà també

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+2}}$$

i, a més, serà expressat per la mateixa operació [9].

Hom cerca a continuació una llei de recurrència per a la sèrie que pot ésser, per exemple

$$\forall n > 1 \qquad a^2_{n+1} = a^2_n + a_n \cdot a_{n+1} + (-1)^n$$

que ve de la verificació del fet que en α_n el producte del numerador d'un terme n de la sèrie fil·lotàctica pel denominador del terme $n + 2$, dividit pel producte del denominador del terme n pel numerador del terme $n + 2$, dóna sempre una diferència de ± 1.

Demostrarem la recurrència anterior per inducció. És a dir, hom comprovarà si aquesta es compleix per a $n = 1$ i, si això és cert, suposant que es compleix per a n, hom veurà si es compleix per a $n + 1$.

Per a $n = 1$ tenim

$$a_2^2 = a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + (-1)^1$$

i com que

$$a_2 = 1 \quad \text{i} \quad a_1 = 1$$

la igualtat és òbvia.

Hom suposarà que es compleix per a n i que, per tant, és cert que

$$a^2_{n+1} = a^2_n + a_n \cdot a_{n+1} + (-1)^n \qquad [10]$$

$$a^2_{n+2} \stackrel{?}{=} a^2_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_{n+2} + (-1)^{n+1} \qquad [11]$$

Hom té que, com que

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad [12]$$

llavors

$$a^2_{n+2} = (a_{n+1} + a_{n+2})^2 = a^2_{n+1} + a^2_n + 2\, a_{n+1} \cdot a_n$$

d'on s'obté el primer terme de [*11*].

Aplicant un altre cop [*12*] per al segon terme de [*11*] hom té

$$a^2_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_{n+2} + (-1)^{n+1} = a^2_{n+1} + a^2_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_n + (-1)^{n+1}$$

i, aleshores, simplificant i substituint [*11*]

$$a^2_n + a_{n+1} \cdot a_n \stackrel{?}{=} a^2_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

del qual

$$a^2_{n+1} \stackrel{?}{=} a^2_n + a_{n+1} \cdot a_n - (-1)^{n+1}$$

Però

$$-(-1)^{n+1} = (-1)^n$$

d'on

$$a^2_{n+1} \stackrel{?}{=} a^2_n + a_{n+1} \cdot a_n + (-1)^n$$

que és la hipòtesi que hom ha donat com a certa. Aleshores es compleix per a $n = 1$, i, si suposem que ho fa per a n, també no compleix per a $n + 1$, és a dir, la recurrència sempre és certa.

Demostrada la llei reiterativa hom trobarà el límit cercat.

De [*10*] resulta

$$a_{n+1}^2 - a_n \cdot a_{n+1} - (a_n^2 + [-1]^n) = 0$$

i les solucions per a_{n+1} són

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1} \pm \sqrt{a_N^2 + 4a_n + 4(-1)^n}}{2}$$

Per a esbrinar si cal escollir la solució positiva o la negativa cal fixar-se que

$$a_{n+1} > a_n > \frac{a_n}{2}$$

i, llavors, com que

$$\frac{a_n \pm \sqrt{a_n^2 + 4a_n^2 + 4(-1)^n}}{2} = \frac{a_n}{2} \pm \frac{\sqrt{5a_n^2 + 4(-1)^n}}{2}$$

Si s'escollís la solució negativa hom tindria

$$a_{n+1} < \frac{a_n}{2}$$

i, per tant, cal escollir la positiva

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{5a_n^2 + 4(-1)^n}}{2}$$

Dividint ara ambdós membres de la igualtat per a_n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \sqrt{5 + \frac{4(-1)^n}{a_n^2}}}{2}$$

Llavors, com que

$$a_n^2 \to +\infty$$

això fa que

$$\frac{1}{a_n^2} \to 0$$

i

$$\frac{4\,(-1)^n}{a_n^2} \to 0$$

Donat que la funció està acotada i que tendeix vers 0, resulta que té límit i el límit és precisament 0.

Aleshores,

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \sqrt{5 + \lim \frac{4\,(-1)^n}{a_n^2}}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

i, finalment:

$$\lim \alpha_2 = \lim = \frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{1}{1 + \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}}$$

que, racionalitzant (multiplicant per $\frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$), ens dóna

$$\lim \alpha_n = \frac{2\,(3 - \sqrt{5})}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \qquad [13]$$

Com es pot apreciar a [7] el límit de la sèrie fil·lotàctica és precisament 1—N, és a dir, la unitat menys el nombre d'or.

Dins l'expressió de P_c

$$P_c = \frac{1}{0.5 - | R - (0.5 + [R]) |}$$

Si $R \leq 0.5$ hom demostrarà que

$$P_c = \frac{1}{R} \qquad [14]$$

(que, òbviament, resulta de [*6*]).
En efecte, si

$$[R] < 0.5$$

aleshores

$$[R] = 0$$

i

$$R - (0.5) < 0$$

d'on

$$R - (0.5) + [R]) = R - (0.5) < 0$$

En aquest cas, l'operació mòdul voldrà dir canviar el signe, és a dir, multiplicar per —1, de manera que

$$| R - (0.5 + [R]) | = | R - 0.5 | = -1 (R - 0.5) = (-R + 0.5)$$

i ara

$$P_c = \frac{1}{0.5 - (-R + 0.5)} = \frac{1}{R}$$

Per altra banda, si

$$R = 0.5$$

aleshores

$$0.5 + [R] = 0.5$$

i

$$| R - (0.5 + ([R]) | = 0$$

d'on

$$P_c = \frac{1}{0.5} \qquad [15]$$

i con que, per definició,

$$R = 0.5$$

resulta que

$$P_c = \frac{1}{R}$$

Amb un raonament similar, si

$$0.5 \leq R < 1$$

llavors

$$P_c = \frac{1}{1 - R} \qquad [16]$$

Evidentment, també

$$[R] = 0$$

i, aleshores

$$P_c = \frac{1}{0.5 - | (R - 0.5) |}$$

Si

$$R > 0.5$$

això implica

$$R - 0.5 > 0$$

i la operació mòdul no té objecte. Llavors

$$P_c = \frac{1}{0.5 - R + 0.5} = \frac{1}{1 - R}$$

Si

$$R = 0.5$$

de [*15*]

$$P_c = \frac{1}{0.5} = \frac{1}{1 - 0.5} = \frac{1}{1 - R}$$

A més, hom pot apreciar fàcilment que si

$$R < 0.5$$

aleshores

$$P_\mu = P_c\, C = C\,\frac{1}{R} = \frac{C}{R} = M$$

Si ara s'aplica l'expressió de P_c quen R és un terme de la sèrie fil·lotàctica hom tindrà que tal com s'ha demostrat

$$R \leq 0.5$$

d'on

$$P_c = 1/R$$

i, aleshores,

$$\lim P_c = \frac{1}{\lim R} = \frac{1}{\lim \alpha_n}$$

i de [*13*]

$$\lim P_c = \frac{1}{1 - N}$$

Establerta la sèrie d'igualtats [8] es té

$$\frac{1 - N}{N} = \frac{N}{1} = \frac{1}{N + 1} = \frac{N + 1}{N + 2}$$

d'on, òbviament,

$$\frac{1 - N}{N} = \frac{N + 1}{N + 2}$$

i, d'ací

$$\frac{N}{1 - N} = \frac{N + 2}{N + 1}$$

Dividint ara cadascun dels membres de la igualtat per N (dividint per N el numerador del primer membre i multiplicant per N el denominador del segon)

$$\frac{1}{1 - N} = \frac{N + 2}{N^2 + N}$$

Però com que

$$N^2 = 1 - N$$

es té que

$$\lim P_c = \frac{1}{1 - N} = \frac{N + 2}{1 - N + N} = \frac{N + 2}{1} 2 + N$$

Dit d'altra manera el límit del període promig fet avinent en classes quan $R \in \alpha_n$ és el nombre d'or més dos.

Per altra banda, com que

$$R \in \alpha_n = \frac{a}{b}$$

on a expressa el nombre de tombs de l'espira generatriu i b el nombre de fulles dins d'aquesta espira, tenim que (com que $R \leq 0.5$) de [*14*]

$$P_c = \frac{1}{R} = \frac{b}{a}$$

de manera que P_c expressa la mitjana de fulles per tomb d'espira i, per tant, en el límit,

$$\lim \frac{b}{a} = 2 + N$$

Dit en un llenguatge més comú, el nombre límit de fulles per tomb d'espira és $2 + N$. Essent N un nombre irracional se'ns dóna la situació teòrica en què en una tija mai no hi haurà una fulla exactament damunt d'una altra, de manera que mai s'engavanyen per a l'absorció de llum solar. L'esmentat abans ens dóna un angle límit de la circumferència de $\alpha = \frac{360}{2 + N} = 137.5078^\circ$, que equival, aproximadament, a $\alpha = 137^\circ\ 30'\ 28''$, corresponents a la secció àuria de la circumferència, ja que $\beta = 360.\ N = 222.4229^\circ$, cosa que equival a $\beta = 222^\circ\ 29'\ 32''$ i, evidentment, $\alpha + \beta = 360^\circ$.

Com que la nostra fórmula de la periodicitat artefactual per P_c dóna una corba discontínua, traslladable i simètrica, de manera que si (segons [*14*])

$$R \leq 0.5 \Rightarrow P_c = 1/R$$

i si (segons [*16*])

$$0.5 \leq R < 1 \Rightarrow P_c = \frac{1}{1 - R}$$

es dóna el cas curiós que, si es pren R com a terme de α_n, aleshores

$$R \leq 0.5$$

i

$$\lim P_c = \frac{1}{\lim R} = \frac{1}{1 - N}$$

i això és exactament el mateix que si haguéssim pres R com el mateix nombre d'or, ja que, llavors,

$$R = N > 0.5 \Rightarrow P_c = \frac{1}{1 - R} = \frac{1}{1 - N}$$

Es pot, per tant, escriure la igualtat següent:

$$\lim P_{c\,(R \in \alpha_\mu)} = P_{c\,(R = N)}$$

Hom ha vist una relació entre l'artefacte rítmic i el nombre d'or, nombre que tan important ha estat per a l'alquímia del Renaixement i que es pot trobar[4] en algunes piràmides egípcies, al Partenó, a l'Erecteion, als frescs de Pompeia, als cànons de molts escultors i en pintors clàssics com Poussin i cubistes actuals com Mondrian, als mòduls arquitectònics de Le Corbusier, a les espirals logarítmiques de les closques dels nummulits, als ammonits, a les banyes dels remugants, a les estries helicoïdals dels músculs d'animals inferiors i també a la musicologia i a l'harmonia, la geometria, la teoria dels pentàgons regulars convexos, etc.

Per a finalitzar, si a la construcció de la figura 1 afegim una recta de pendent R tindrem la de la figura 4.

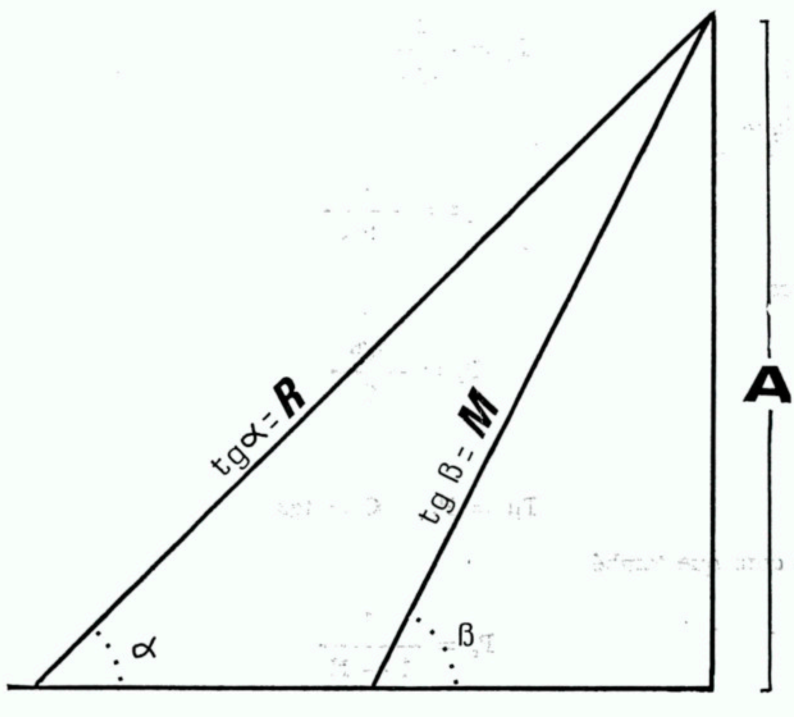

FIG. 4

I es podran fer les següents relacions:

$$R = C/M \Rightarrow C = RM$$

de manera que

$$C = tg\alpha \cdot tg\beta$$

Si

$$R \in \alpha_{\mu}$$

aleshores

$$P_c = 1/R,$$

però com que

$$R = tg\alpha$$

resulta que

$$P_c = \frac{1}{tg\alpha} = ctg\alpha$$

com que

$$tg\alpha = \frac{C}{tg\alpha}$$

llavors

$$P_c = \frac{tg\beta}{C}$$

i

$$P\mu = P_c \qquad C = tg\beta$$

Però com que també

$$P_c = \frac{1}{1 - N}$$

tenim, en el límit,

$$\frac{\mathrm{tg}\beta}{C} = \frac{1}{1 - N}$$

d'on

$$C = \mathrm{tg}\beta - N\,\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\beta\,(1 - N)$$

i

$$\frac{C}{\mathrm{tg}\beta} = 1 - N$$

i

$$-N = \frac{C}{\mathrm{tg}\beta} - 1$$

d'on, òbviament,

$$N = 1 - \frac{C}{\mathrm{tg}\beta} = 1 - \mathrm{tg}\alpha.$$

És a dir, es té el nombre d'or expressat en funció dels angles α i β i, naturalment, aqueixos dos angles es relacionen entre ells per

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{C}{\mathrm{tg}\beta}.$$

En el límit $\alpha - 20.9051^{\circ}$ que equival a $20^{\circ}\,54'\,18''$.

Agraïment

L'autor agraeix la col·laboració inestimable del doctor Miquel Tort, professor adjunt del Departament de Teoria de Funcions de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.

BIBLIOGRAFIA

1. GIL, F.: *Contribución al estudio bioestadístico de los parámetros dimensionales celulares.* Tesis doctoral. Facultad de Biología. Universidad de Barcelona. Barcelona (1974).
2. GIL, F.: *Artifactual rythmicity by interaction of two centralization measures.* «Biometrics» (Tucson-Ar.) (1975).
3. GIL, F.: *Efectos de discretización en cariometría y relación con otros fenómenos cuánticos.* «Bol. R. Soc. Esp. Hist. Nat.» (1975).
4. GUIRAO, P.: *La serie Fibonacci.* «Estudios de matemática y filosofía», ?: 1-20 (1958).